SCHEDE ED ESERCIZI

SU

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

Schede sugli esponenziali

0 Premesse

Relazione: qualunque abbinamento di elementi fra diversi insiemi.

Funzione: relazione che associa a **ogni** elemento di un insieme, chiamato *dominio*, **esattamente un** elemento di un altro insieme, chiamato *codominio*.

In analisi, le funzioni che interessano sono quelle che associano ogni valore di un insieme numerico, rappresentabile sulle ascisse, a esattamente un valore di un altro insieme numerico, rappresentabile sulle ordinate.

Esempio: la retta $y = 3x+2$ è una funzione che associa a ogni valore x esattamente un valore y; sia il dominio sia il codominio sono l'insieme di tutti i numeri reali.

Esempio: la parabola $y = -3x^2$ è una funzione che associa a ogni valore x esattamente un valore y; il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali, mentre il codominio è l'insieme di tutti i numeri non positivi.

1 Funzione esponenziale

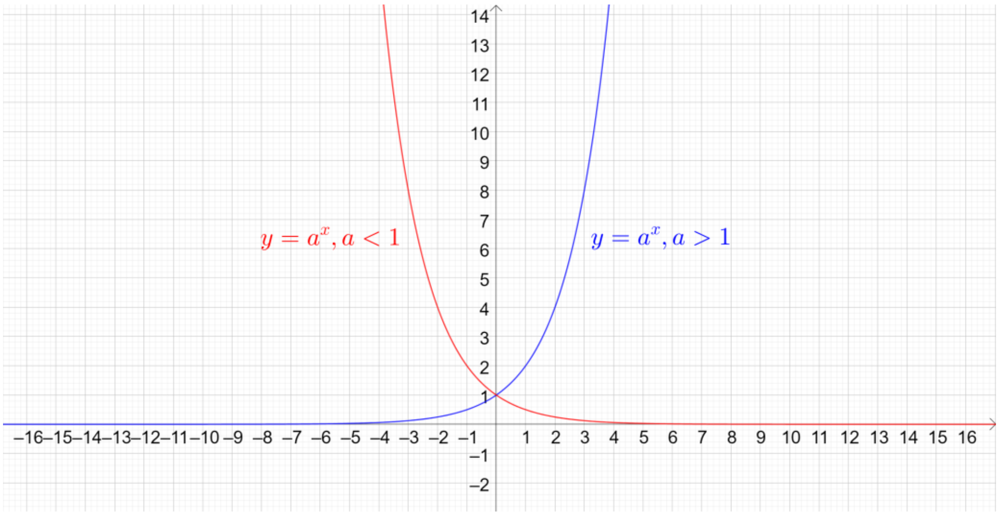
La *funzione esponenziale*, o più brevemente l'*esponenziale*, è

(1.1) $y = a^x$,

dove il dominio è l'insieme di tutti i numeri reali, mentre il codominio è l'insieme di tutti i numeri positivi. Il parametro a può assumere qualunque valore positivo.

La parola "esponenziale" è dovuta al fatto che la x è all'esponente.

L'andamento dell'esponenziale è rappresentato dal grafico sotto (la curva a trattini è ottenuta con a = 2, quella a puntini con a = ½).



Il grafico si ottiene nel solito modo, cioè redigendo una tabella come la seguente.

x	*y*
–4	1/16
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Aspetti notevoli del grafico.

* le due curve sono simmetriche rispetto all'asse delle *y*;

* le due curve passano per il punto *P*(0;1);

* concentrandosi sulla curva con $a > 1$, si nota che andando verso destra cresce molto (crescita esponenziale);

* sempre concentrandosi sulla stessa curva, si nota che andando verso sinistra si avvicina velocemente all'asse delle *x*, ma senza mai toccarlo.

2 Fondamenti dell'esponenziale

Tutti i fenomeni che variano a un tasso costante seguono una legge esponenziale; infatti, un *tasso di variazione* è dato dalla variazione di una grandezza rispetto al suo valore iniziale durante un dato periodo; se C_n rappresenta la grandezza C al tempo iniziale n e C_{n+1} la stessa grandezza dopo 1 periodo, cioè al tempo finale n+1, allora la variazione è $C_{n+1}–C_n$ e il tasso di variazione costante i è

$$i = \frac{C_{n+1} - C_n}{C_n}.$$

Il tasso di variazione è costante se non cambia nel tempo, cioè se non dipende da n, ciò che qui è rappresentato omettendo l'indice n per il simbolo i.

Come si passa dalla formula sopra a un'esponenziale? Ecco i passaggi.

– Intanto si scrive

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{C_n} = \frac{C_{n+1}}{C_n} - \frac{C_n}{C_n} = \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1,$$

ottenendo quindi

$$i = \frac{C_{n+1}}{C_n} - 1;$$

poi si isola C_{n+1}, arrivando a

(2.1) $C_{n+1} = (1+i)C_n$.

– Questa formula non è comoda, perché per determinare a un valore di C_t partendo da C_0 bisogna calcolare tutti i passaggi intermedi uno alla volta; ma si può ottenere un equivalente molto migliore, nel modo che segue.

Poniamo n = 0; la formula diventa $C_1 = C_0(1+i)$.

Poniamo n = 1; la formula diventa $C_2 = C_1(1+i)$. Ma, dato che abbiamo appena trovato qual è la formula di C_1 , possiamo sostituirla e ottenere

$C_2 = C_0(1+i)(1+i)$, cioè $C_2 = C_0(1+i)^2$.

Poniamo $n = 2$; la formula diventa $C_3 = C_2(1+i)$. Ma dato che abbiamo appena trovato qual è la formula di C_2 , possiamo sostituirla e ottenere

$C_3 = C_0(1+i)^2(1+i)$, cioè $C_3 = C_0(1+i)^3$.

Continuando così, per un numero n qualunque di volte, si arriva a

(2.2) $C_n = C_0(1+i)^n$.

Ed ecco l'esponente n emergere dalle nebbie. Dividendo per C_0 l'equazione (2.2) si ottiene

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n,$$

che ha stessa struttura dell'equazione (1.1), come è chiaro da questa minitabella.

$y = a^x$	corrisponde a	$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n$
y	corrisponde a	C_n/C_0
a	corrisponde a	$1+i$
x	corrisponde a	n

3 Applicazioni dell'esponenziale

Ecco alcuni esempi di fenomeni che variano a un tasso costante.

A Assorbimento acustico

Se I è l'intensità di un suono, misurata in energia per unità di tempo e unità di superficie attraversata, e x lo spessore attraverso cui passa il suono, si trova sperimentalmente che in prima approssimazione vale la legge di assorbimento acustico

$I = I_0a^x$,

dove I_0 è il suono senza ostacoli e $0 < a < 1$ è un fattore di assorbimento per unità di superficie attraversata, diverso da materiale a materiale.

Un'applicazione interessante di questa legge è che per ridurre un rumore *non bisogna aumentare lo spessore proporzionalmente, ma basta molto meno*; ad esempio, se I_0 è 30, x e 2 e a è 0,4, allora si ha $I = 30·0,42 = 4,8$; per ottenere $I = 2,4$ non serve $x = 4$, ma, dato che è $2,4 = 30·0,4^x$, risolvendo l'equazione si trova che basta $x = \ln(2,4/30)/\ln 0,4 \cong 2,7565$.

In generale, pensando a un qualunque tramite assorbente come costituito da strati di spessore uniforme posti perpendicolarmente a un'emissione, se I_0 è l'intensità dell'emissione quando tocca una superficie (corretta per la perdita dovuta a un eventuale riflesso sulla superficie), x lo spessore del tramite attraversato e a un fattore di attenuazione determinato dal tramite, risulta la cosiddetta *legge di Beer–Lambert–Bouguer*.

B Crescita economica senza domanda

Mostriamo come si sviluppa la crescita economica nel tempo, se le condizioni sul risparmio e sulla produttività non variano.

Relazioni

* Gli investimenti I_t al tempo t sono una parte s del reddito R_t dello stesso periodo:

(B.1) $I_t = sR_t$;

il parametro s, che rappresenta la propensione al risparmio, è supposto costante.

* Gli investimenti I_t sono anche ciò che fa aumentare il capitale C_t:

(B.2) $C_t + I_t = C_{t+1}$.

* La produzione Y_t è proporzionale al capitale C_t, secondo una produttività media p, supposta costante:

(B.3) $Y_t = pC_t$.

* Il valore di ciò che è prodotto è anche il valore di ciò che si guadagna, per cui la produzione Y_t è uguale al reddito R_t:

(B.4) $Y_t = R_t$.

Tre sostituzioni, un raccoglimento e un paragone

Sostituendo la (B.4) nella (A.1), si ottiene

(B.5) $I_t = sY_t$;

sostituendo la (B.3) nella (B.5), si ottiene

(B.6) $I_t = spC_t$;

sostituendo la (B.6) nella (B.2), si ottiene

$C_t + spC_t = C_{t+1}$,

cioè, raccogliendo C_t a fattor comune,

(B.7) $C_{t+1} = C_t(1+sp)$.

La (B.7) ha la stessa forma della (2.1), che riporto qui per comodità:

(2.1) $C_{n+1} = (1+i)C_n$.

là c'è t e qui c'è n e là c'è i e qui c'è sp, ma le relazioni fra le variabili e i parametri sono le stesse. Segue che la soluzione – partendo da $C_0 = 1$ – è la stessa, cioè

(B.8) $C_t = C_0(1+sp)^t$.

In sintesi, questo modello stabilisce che, con propensione al risparmio e produttività fissi, il capitale cresce in modo esponenziale.
Il reddito è uguale al capitale moltiplicato per p e gli investimenti sono uguali al reddito moltiplicato per s, quindi crescono tutti in modo esponenziale.
La crescita è tanto maggiore quanto maggiori sono s, cioè la quota di reddito destinata gli investimenti, e p, cioè la produttività media.

C Datazione mediante il radiocarbonio

Scopi di questa lezione: introdurre all'applicabilità di fenomeni naturali; introdurre alla concretezza di uno strumento che mostra l'attendibilità degli studi archeologici; introdurre i logaritmi.

Il fenomeno naturale

Il radiocarbonio, o carbonio radioattivo, o ^{14}C, è un isotopo del carbonio comune, o ^{12}C: mentre questo ha 6 protoni e 6 neutroni, il ^{14}C ha 6 protoni e 8 neutroni. Approssimativamente, per ogni atomo di ^{14}C nell'atmosfera ci sono 1300 miliardi di ^{12}C.
Il ciclo di vita del ^{14}C nell'atmosfera è questo: la radiazione cosmica, di intensità costante, bombarda l'atmosfera. Alcuni atomi di azoto, o ^{14}N, vengono accresciuti di un neutrone; questo origina rapidamente la formazione di un atomo di ^{14}C e di uno di pròzio, o ^{1}H (che, insieme a ^{2}H, il deuterio, e a ^{3}H, il trizio, è uno degli isotopi dell'idrogeno, ed anzi di gran lunga il più frequente). Gli atomi di ^{14}C sono instabili e decadono in ^{14}N, liberando un elettrone. Per un caso singolare, il tasso di nascita e quello di morte del ^{14}C sono di solito più o meno uguali (le eventuali variazioni in alcuni periodi e in alcuni luoghi vengono corrette dai ricercatori nel corso dell'analisi), perciò la proporzione fra ^{14}C e ^{12}C nell'atmosfera è costante nel tempo. Comunque, anche se non lo fosse, si potrebbe stimare facilmente come varia la concentrazione nel tempo e avere comunque il dato di confronto per le datazioni.
Chimicamente, il ^{14}C si comporta come il ^{12}C, perciò diventa assai presto anidride carbonica (cioè CO_2). Questa entra ed esce da tutti gli esseri viventi che l'emettono e l'assorbono, quindi le piante, gli animali e parecchi microorganismi. Dato che la proporzione fra ^{14}C e ^{12}C nell'atmosfera è costante, questo scambio negli esseri viventi fa sì che anche la loro proporzione sia costante. Ma tutto ciò funziona finché l'essere è *vivente*. Appena muore, lo scambio con l'atmosfera non c'è più e quindi non c'è più arrivo di nuovo ^{14}C, che pertanto non può che diminuire, dato che decade in ^{12}C.
Il tempo di decadimento non è un valore certo, ma una media: una data quantità di ^{14}C si dimezza in media nel giro di 5730$\pm$30 anni.
Quindi, misurando la proporzione fra ^{14}C e ^{12}C in tessuti organici e sapendo qual è la proporzione nell'atmosfera, si può sapere quando questi tessuti sono morti. E, dato che la quantità di ^{12}C è data, usare la proporzione fra ^{12}C e ^{14}C o usare la quantità assoluta di ^{14}C è lo stesso.
Questo metodo, con cui si misura la data di morte dei tessuti organici, è stato messo a punto dal premio Nobel 1960 per la fisica Willard Libby.

I calcoli

La regola da cui bisogna partire è: il ^{14}C si dimezza ogni 5730 anni *a un tasso costante*. Quest'ultima condizione indica che la formula da usare è un'esponenziale: indicando con C la quantità di radiocarbonio in un dato momento, questa impiegherà d anni a dimezzarsi, per cui dopo quel tempo si avrà sia Cr^d sia $C/2$. Uguagliando queste due quantità, si ottiene

$$Cr^d = C/2,$$

quindi $r^d = ½$, quindi

$r = (½)^{1/5730} \cong 0,999879$.

La formula per datare col radiocarbonio è dunque data da

$Cr^t = C_{oggi}$,

dove C è la quantità di radiocarbonio contenuta nel reperto quando è morto e C_{oggi} è la quantità di radiocarbonio osservata oggi. Da qui si arriva a $t = –\ln(C/C_{oggi})/\ln r$ e, sapendo il valore del reciproco di $\ln r = \ln 0,999879 \cong –0,000120968$, cioè –8266,64, e isolando t, si ottiene

$t = 8266,64 \cdot \ln(C/C_{oggi})$.

In sintesi:
– conosciamo il dato C_{oggi}: è il numero di atomi di ^{14}C presenti oggi in un'unità (ad esempio, un milligrammo) del tessuto morto. Questa misura ci è data dal laboratorio in cui abbiamo mandato il tessuto.
– Conosciamo C: è il numero di atomi di ^{14}C presenti nella stessa unità di tessuto al momento in cui è morto, cioè è il numero di atomi presenti ancor oggi nell'atmosfera, dato che questo valore è più o meno costante nel tempo e le eventuali variazioni vengono corrette dai ricercatori.
– Se vogliamo trovare t, cioè gli anni che sono passati dalla morte del tessuto ad oggi, basta usare la formula appena elaborata.

Un esempio

È stato trovato un campione di semi di grano selvatico in un sito archeologico dell'Europa centrale. Nel campione mandato ad analizzare in laboratorio sono presenti $5,56 \times 10^{23}$ atomi di ^{14}C, mentre in un'uguale quantità di tessuto di oggi ce ne sarebbero $6,74 \times 10^{24}$. Stimare l'età del sito archeologico.
L'applicazione della formula porta a

$t = 8266,64 \cdot \ln(6,74 \times 10^{24}/5,56 \times 10^{23}) = 20.626$ anni.

Quindi, dato che il grano selvatico è morto 20.626 anni fa (approssimativamente, perché questo è un valore medio), il sito non è precedente a tale data. Può tuttavia essere successivo, anche se non di molto, perché è improbabile che le riserve di grano in quel periodo durassero a lungo.

D Il caso Amalia De Lana

Viene ritrovato il corpo della signora Amalia De Lana; la temperatura degli organi interni è 33,3 °. Dopo 3 ore, in cui il corpo non è stato mosso, la temperatura è scesa a 32,2 °. Si sa che la stanza ha mantenuto la temperatura di 21 °. Quante ore prima del ritrovamento è morta la signora?

Gli oggetti si raffreddano secondo una legge scoperta da Newton, cioè

$T–a = m^t q$,

dove T è la temperatura del corpo, a quella dell'ambiente, t il tempo, m il fattore di raffreddamento e q un parametro legato all'unità di misura.
Dovendo trovare due parametri, servono due equazioni, che, sapendo che $a = 21$, $T_1 = 33{,}3$, $t_1 = 0$, $T_2 = 32{,}2$ e $t_2 = 3$, sono

$33{,}3–21 = m^0q$;
$32{,}2–21 = m^3q$

o, calcolando le differenze a sinistra e $m^0 =1$,

$12{,}3 = q$;
$11{,}2 = m^3q$.

sostituendo, si ottiene

$11{,}2 = 12{,}3m^3$,

da cui

$m = (11{,}2/12{,}3)^{1/3} = 0{,}96925$.

Il corpo della signora si è quindi raffreddato secondo la legge

$T–21 = 0{,}96925^t 12{,}3$.

È noto ai familiari della signora che la sua temperatura abituale era 36,8 °, pertanto risolvendo

$36{,}8–21 = 0{,}96925^t 12{,}3$,

si trova

$$t = \frac{\log_{10} \frac{36{,}8-21}{12{,}3}}{\log_{10} 0{,}96925} \cong -8{,}0176 \;.$$

Quindi si stima che la signora sia morta pochissimo più di 8 ore prima del ritrovamento.

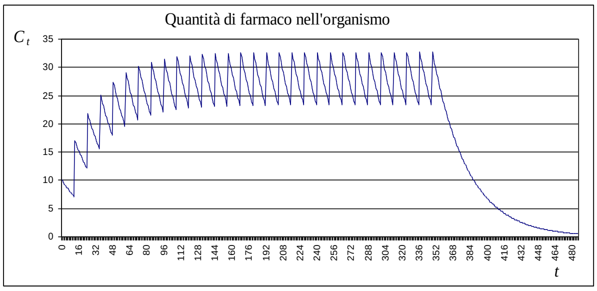
E Somministrazioni ripetute

Dose singola

Tutti i farmaci, una volta introdotti in un organismo, vengono più o meno lentamente eliminati, per lo più dal fegato e dai reni. Il principio base è che il tasso di eliminazione k sia costante nel tempo: in un periodo dato, ad esempio un'ora, l'organismo elimina una certa percentuale k (costante nel tempo, anche se variabile secondo il farmaco e l'individuo), ad esempio il 10%, del farmaco in circolazione l'ora prima. Quindi, se il farmaco presente nell'organismo all'ora t è C_t, si ha la relazione $C_{t+1} = (1–k)C_t$, da cui, con procedura nota, si ottiene $C_t = C_0(1–k)^t$, dove C_0 è la dose iniettata.

Dosi ripetute

Se il farmaco viene reintrodotto ripetutamente, ad esempio ogni n ore, qual è l'andamento generale della sua quantità nell'organismo? L'andamento tipico è dato dal grafico qui sotto (Con k = 0,03, C_0 = 10, n = 12 e 30 ripetizioni).



Ad ogni somministrazione si ottiene un picco nelle quantità. L'andamento della funzione è a dente di sega, ma crescente e soprattutto *limitata da un asintoto orizzontale*.

Calcoli per gli interessati

– *Esatta forma funzionale dell'andamento*: fra il picco numero P–1 e il picco successivo, cioè per $(P–1)n < t < Pn$, l'organismo ha subito P–1 somministrazioni e deve ancora smaltire una quantità di farmaco $C_0(1–k)^t$ per la prima somministrazione, una quantità $C_0(1–k)^{t–n}$ per la seconda, una quantità $C_0(1–k)^{t–2n}$ per la terza, ..., una quantità $C_0(1–k)^{t–(P–1)n}$ per la P–1–esima.
La somma di tutte queste quantità è

$$C_t = C_0[(1–k)^t+(1–k)^{t–n}+(1–k)^{t–2n}+ \ldots +(1–k)^{t–(P–1)n}].$$

Raccogliendo a fattor comune anche $(1–k)^t$, si ottiene una progressione geometrica di ragione $(1-k)^{-n} = \left(\frac{1}{1-k}\right)^n$, da cui, ricordando come si sommano i termini di una progressione geometrica, si arriva a

$$C_t = C_0 \frac{1-(1-k)^{nP}}{1-(1-k)^n}(1-k)^{t+n-nP},$$

con P = 1, 2, ...
– *Accorgimenti per Excel*: naturalmente, ciò vale per $(P–1)n < t < Pn$. Se si smette di ripetere le somministrazioni, basta il vincolo $t > nP$.
Per il grafico in Excel, conviene calcolare P = int(t/n)+1, accorgimento che rende inutile l'uso del vincolo.
Se si vuole introdurre nel foglio elettronico anche un numero totale di ripetizioni Q, bisogna sostituire a P la formula min(P; Q).
La formula da introdurre in Excel è quindi concretamente

$$C_t = C_0 \frac{1-(1-k)^{n\min[\mathrm{int}(t/n)+1;Q]}}{1-(1-k)^n}(1-k)^{t+n-n\min[\mathrm{int}(t/n)+1;Q]}.$$

– *Caratteri notevoli*: la determinazione dell'asintoto è più facile se si guarda all'andamento generale dei soli picchi C_p, che è dato dalla somma di C_0, $C_0(1–k)^n$, $C_0(1–k)^{2n}$..., $C_0(1–k)^{(P–1)n}$, da cui si ottiene $C_P = C_0 \frac{1-(1-k)^{nP}}{1-(1-k)^n}$. Da qui segue il valore dell'asintoto orizzontale, cioè

$$\lim_{P\to\infty} C_0 \frac{1-(1-k)^{nP}}{1-(1-k)^n} = C_0 \frac{1}{1-(1-k)^n}.$$

Pertanto, anche se si somministra il farmaco moltissime volte, non si riesce a superare una certa quantità limite presente nell'organismo.

Applicazioni

* Il catrame nei polmoni di un fumatore è un esempio perfetto di somministrazioni ripetute di un "farmaco" (in greco antico, *phàrmakon* significa anche *veleno*).
* Questo modello aiuta anche a spiegare perché quando si studia è utile ripetere: quando si apprende, si tende a dimenticare, ma ripetendo l'apprendimento si aumenta la conoscenza disponibile (curva dell'oblio = *forgetting curve*: $P = e^{-t/S}$, dove P è la probabilità con cui una traccia di memoria può essere recuperata e S è la stabilità della memoria).
* Le campagne pubblicitarie appartengono, almeno in prima approssimazione, a questo schema: il numero di consumatori attratti da un dato prodotto va diminuendo, a meno che non lo si riproponga con una nuova pubblicità.
* La propaganda di regime è molto simile alle campagne pubblicitarie: l'opinione pubblica favorevole al regime va diminuendo, a meno che non lo si esalti continuamente con nuove ondate di propaganda.
* L'attenzione a un programma TV (con un minimo di successo) segue lo stesso schema: l'interesse dopo la prima puntata andrebbe scemando, ma con la seconda puntata c'è un nuovo rinforzo di interesse, con la terza un altro rinforzo e così via.
* In un dato gruppo sociale, la disomogeneità culturale tende a diminuire, a meno che non ci siano infiltrazioni da altri gruppi sociali, non omogenei al gruppo dato. La ripetizione regolare di queste infiltrazioni aumenta la disomogeneità, ma non oltre un dato limite, che può crescere soltanto con una maggior frequenza di infiltrazioni.
* L'assunzione di calorie *sembra* assimilabile a quella di un farmaco: è ripetuta e le calorie "presenti" nell'organismo diminuiscono lentamente nel tempo. Resta da capire se lo fanno a un tasso costante; dato che il grosso delle calorie che assumiamo serve a mantenere il corpo a temperatura costante e che la legge di raffreddamento di Newton è una funzione esponenziale decrescente, sembrerebbe così, almeno su brevi intervalli. Tuttavia, il corpo consuma quantità più o meno fisse di energia per unità di tempo, quindi in inedia le riserve di grasso scendono in modo lineare, non esponenziale; ciò che spiega perché anche con somministrazioni non si riscontra un limite massimo all'obesità.

F Lampadine fulminate

La durata di una lampadina è imprevedibile, ma se si parte da un lotto di L_0 lampadine, si può osservare che il numero L_t di lampadine ancora funzionanti dopo un tempo t segue approssimativamente la legge

$L_t = L_0c^t$,

dove $0 < c < 1$ è il fattore di fulminazione.
Spesso si usa il termine *emivita* (metà vita) per indicare la durata media di una lampadina; per calcolarla bisogna trovare quanto tempo serve per dimezzare il lotto iniziale, cioè bisogna risolvere

$$L_0/2 = L_0 c^t,$$

da cui $c^t = ½$, cioè $c = (½)^{1/t}$.
Esempi concreti
– Vita media di una lampadina a incandescenza: 800 ore. Quindi è $c = (½)^{1/800} = 0{,}999134$ e la legge di fulminazione di questo genere di lampadine è data da

$$L_t = L_0 0{,}999134^t.$$

– Vita media di una lampadina alogena: 2000 ore. Quindi è $c = (½)^{1/2000} = 0{,}999653$ e la legge di fulminazione di questo genere di lampadine è data da

$$L_t = L_0 0{,}999653^t.$$

4 *Altri modi di fondare l'esponenziale*

Si può arrivare all'esponenziale anche con congetture diverse da un tasso di variazione costante; ecco alcuni esempi.

L'equazione esponenziale di Cauchy per i numeri naturali

Si determina una funzione esponenziale per ogni fenomeno continuo per cui vale la legge

$$(4.1)\quad f(x+y) = f(x)f(y),$$

chiamata *equazione esponenziale di Cauchy*.
Una prima soluzione particolare, per quanto banale, è $f(x) \equiv 0$. Quella generale si trova con un metodo tanto ingegnoso quanto istruttivo.
Mostro qui il caso con s e t interi non negativi; il caso generale è più avanti.
Si fissa $y = 1$, ottenendo l'equazione

$$f(x+1) = f(x)f(1),$$

da cui seguono

per $x = 1$: $f(2) = f(1)f(1) = f(1)^2$,

per $x = 2$: $f(3) = f(2)f(1) = f(1)^2 f(1) = f(1)^3$,

per $x = 4$: $f(4) = f(3)f(1) = f(1)^3 f(1) = f(1)^4$,

... per induzione

per un generico $x = t$: $f(k) = f(1)^t$.

Questa funzione ha la stessa forma della (4.1), ma invece di y abbiamo $f(t)$, invece di a abbiamo $f(1)$ e invece di x abbiamo t. Il punto è che in entrambi i casi due quantità variabili sono collegate fra loro elevando a esponente una delle due.

L'equazione esponenziale di Cauchy per numeri reali

Dopo aver trovato la soluzione dell'equazione (4.1) per numeri naturali, si passa a trovare quella per tutti i numeri reali, partendo dalle frazioni.
* Per cominciare, fissando $y = 0$ nella (4.1), risulta $f(x) = f(x)f(0)$, da cui

(4.2) $f(0)=1$.

* Poi si trova una soluzione valida per i numeri naturali. Dalla (4.1) segue per induzione

(4.3) $f(x_1+x_2+...+x_m)=f(x_1)f(x_2)...f(x_m)$ per i valori reali di x_1, x_2, ..., x_m.

Può non essere così evidente perché valga questa formula, perciò ecco tutti i passaggi.
– Per $m = 1$, la (4.1) si riduce a $f(x) = f(x)$, che è ottenuta fissando $y = 0$; l'equazione (4.2) dà già $f(0) = 1$, quindi la (4.1) diventa

$$f(x+0)=f(x)\cdot 1,$$

che è un'identità. E così è stabilito il punto di partenza dell'induzione, for $m = 1$.
– Per $m > 1$, abbiamo

$$f(x_1+x_2+...+x_{m+1}) = f[(x_1+x_2+...+x_m)+x_{m+1}],$$

perché le m+1 variabili a sinistra dell'uguale si possono leggere come 2 soltanto: la prima è la somma delle prime m variabili e la seconda è x_{m+1}; risulta allora

$$f[(x_1+x_2+...+x_m)+x_{m+1}] = f(x_1+x_2+...+x_m)f(x_{m+1}),$$

perché ponendo $x := x_1+x_2+...+x_m$ e $y := x_{m+1}$ otteniamo appunto la (4.1); infine risulta

$$f(x_1+x_2+...+x_m)+f(x_{m+1}) = f(x_1)f(x_2)...f(x_m)f(x_{m+1}),$$

perché questa è la (4.3) con l'aggiunta di $f(x_{m+1})$ a sinistra e a destra dell'uguale. Il passaggio generico da m a m+1 è quindi dimostrato e l'induzione è completa.
Avendo mostrato che l'equazione (4.3) vale per $m \geq 1$, si può uguagliare fra loro tutte le sue variabili a x e ottenere

(4.4) $f(mx) = f(x)^m$.

* Per passare alle frazioni, si introduce $n \neq 0$ (per numeri naturali) e w (per valori reali), in modo da poter scrivere la (4.4) con queste nuove variabili:

(4.5) $f(nw) = f(w)^n$.

Per $nw = mx$, confrontando le equazioni (4.4) e (4.5) si arriva a

$$f(w)^n = f(x)^m,$$

cioè, isolando $f(w)$ e sostituendo $w = \frac{m}{n} x$,

$$f\left(\frac{m}{n} x\right) = f(x)^{\frac{m}{n}}.$$

Fissando $x = 1$, risulta

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}},$$

cioè la soluzione per tutte le frazioni non negative.
* Si estende la soluzione alle frazioni negative fissando $y = -x$ nell'equazione (4.1) e ottenendo $f(x-x) = f(x)f(-x)$; poi, dato che è $f(x-x) = f(0) = 1$, l'equazione si riduce a $1 = f(x)f(-x)$, cioè a

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(1)^x} = f(1)^{-x}.$$

* Passando infine dalle frazioni a tutti i numeri reali, se q_k è una successione di frazioni m_k/n_k col numero reale x come suo limite, allora per definizione è $\lim_{k\to\infty} q_k = x$. Si può perciò scrivere

$$f(x) = f\left(\lim_{k\to\infty} q_k\right) = \text{ per definizione di continuità}$$

$$= \lim_{k\to\infty} f(q_k) = \lim_{k\to\infty} f(1)^{q_k} = f(1)^{\lim_{k\to\infty} q_k} = f(1)^x.$$

Quindi la soluzione è

$$f(x) = a^x \qquad \text{per valori reali di } a := f(1).$$

Combinazione di equazioni funzionali

Si può combinare

(4.6) $f[f(x;t);s] = f(x;t+s)$.

con l'equazione *lineare* di Cauchy, cioè

(4.7) $f(x+y;t) = f(x;t) + f(y;t)$,

la cui soluzione è

(4.8) $f(x;t) = f(1;t)x$,

che inserita nella (4.6) dà

$$f(1;s)[f(1;t)x] = f(1;t+s)x$$

o, per x = 1,

$$f(1;s)f(1;t) = f(1;t+s).$$

Questa è un'equazione esponenziale di Cauchy, che porta a $f(1;t) = f(1;1)^t$, per cui la soluzione di (4.6) e (4.7) è

$$f(x;t) = xf(1;1)^t.$$

Le (4.6) e (4.7) hanno applicationi interessanti; ecco alcuni esempi:
– Se *x* è una somma di denaro, *t* il tempo durante il quale la somma è prestata e *f*(1;1) il fattore d'interesse (cioè 1 + il tasso d'interesse), fondiamo la formula dell'interesse composto (Sahoo & Kannappan, 2011, p. 66).
– Pensando a un tramite assorbente come costituito da strati di spessore uniforme posti perpendicolarmente a un'emissione, se *x* è l'intensità dell'emissione quando tocca una superficie (corretta per la perdita dovuta al riflesso sulla superficie), *t* lo spessore del tramite attraversato e *f*(1;1) un fattore di attenuazione determinato dal tramite, fondiamo la cosiddetta *legge di Beer–Lambert–Bouguer*.
– Se *x* è la differenza fra la temperatura di un corpo e il suo ambiente, *t* il tempo trascorso e *f*(1;1) un fattore che dipende dalla capacità termica del corpo, fondiamo la *legge di raffreddamento di Newton*.
– Se *x* è il numero iniziale di particelle soggette a decadimento radioattivo, *t* il tempo trascorso e *f*(1;1) il fattore di decadimento, fondiamo il processo di decadimento.
– Se *x* è la concentrazione di una sostanza somministrata a un organismo, *t* il tempo trascorso e *f*(1;1) il fattore di eliminazione in un compartimento dell'organismo (fegato, pelle, cervello, vasi sanguigni...), fondiamo il *modello a un compartimento* in farmacocinetica.

L'equazione esponenziale di Pexider per numeri reali

Più in generale: e se invece di avere una sola funzione, come nell'equazione di Cauchy, le funzioni fossero *tre*? Ecco l'equazione da risolvere:

(4.9) $f(x+y) = g(x)h(y)$.

Sembra un compito impossibile, perché a un primo sguardo viene da pensare che le soluzioni siano infinite; invece la soluzione continua *è unica*, purché *g*(*x*) e *h*(*y*) non passino per l'origine, cioè purché siano $g(0) \neq 0 \neq h(0)$. I passaggi sono i seguenti.
– Ponendo *y* = 0, si ottiene

$f(x) = g(x)h(0)$

e, isolando *g*(x) e sostituendola in (4.9), si elimina *g*(*x*):

(4.10) $f(x+y) = \dfrac{f(x)}{h(0)}h(y)$.

– Analogamente, ponendo *x* = 0, si ottiene

$f(y) = g(0)h(y)$

e, isolando $h(y)$ e sostituendola in (4.10), si elimina anche $h(y)$:

(4.11) $$f(x+y) = \frac{f(x)}{h(0)} \cdot \frac{f(y)}{g(0)}.$$

I denominatori della (4.11) spiegano perché sopra si è posta la condizione $g(0) \neq 0 \neq h(0)$.

– Ponendo $x = 0 = y$, la (4.9) diventa $f(0) = g(0)h(0)$, perciò la (4.11) si può anche scrivere come

(4.12) $$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(0)},$$

il che elimina anche gli ultimi residui di $g(x)$ e $h(y)$.

– Se non fosse per quel f(0) al denominatore, la (4.12) sarebbe un'equazione di Cauchy. Ma a questo si pone rimedio: dividendo la (4.12) a destra e a sinistra per $f(0)$, si ottiene

$$\frac{f(x+y)}{f(0)} = \frac{f(x)}{f(0)} \cdot \frac{f(y)}{f(0)},$$

per cui ogni $f(z)$, dove z può essere x, y, $x+y$ o tutte le variabili che si vuole, è divisa per $f(0)$. Allora basta porre $F(z) := f(z)/f(0)$, per ottenere

$F(x+y) = F(x)F(y)$

e questa è proprio un'equazione esponenziale di Cauchy, la cui soluzione sappiamo essere

$F(x) = F(1)^x$.

– A questo punto basta sostituire a ritroso $f(x)$ al posto di $F(x)$ per ottenere

$$\frac{f(x)}{f(0)} = \left[\frac{f(1)}{f(0)}\right]^x$$

o, isolando f(x),

$$f(x) = f(0)\left[\frac{f(1)}{f(0)}\right]^x.$$

Anche con tre variabili si ottiene un'esponenziale, ma questa volta accompagnata da un fattore costante $f(0)$ (il che, fra l'altro, la rende più realistica nelle applicazioni).

Esercizi sugli esponenziali

1 Un segnale pari a 340 unità deve attraversare un filtro che segue la legge di Beer–Lambert–Bouguer, con fattore di assorbimento pari a 0,9234. A quante unità viene ridotto dopo aver attraversato uno spessore pari a 1,3?

2 In un sistema economico con propensione costante al risparmio pari al 24% e produttività media costante del capitale pari a 0,28, il capitale iniziale è di 450 unità convenzionali. A quante unità convenzionali si prevede che ammonterà dopo 15 anni?

3 Nello stesso sistema economico, il reddito medio è ora pari a 28.000 euro annui; a quanti euro si prevede che ammonterà dopo 10 anni?

4 L'analisi di un manufatto in legno di quercia mostra che nel campione sono presenti $2{,}98\times10^{26}$ atomi di ^{14}C, mentre in un'uguale quantità di legno appena prodotto ce ne sono $8{,}15\times10^{26}$. A quando si stima che risalga il manufatto?

5 Le patate arrosto appena uscite dal forno sono a 120 ° e la temperatura ambiente è 21 °. se dopo 5 minuti la temperatura delle patate è 85 °, qual è la legge di raffreddamento *oraria*?

6 Vengono iniettati 50 ml di un certo principio attivo, che viene smaltito a un tasso del 12% all'ora. Il farmaco viene iniettato ogni 48 ore. Qual è la quantità a regime nell'organismo immediatamente dopo un'iniezione?

7 Su 100 individui che hanno visto una certa pubblicità, 8 comprano il prodotto il giorno stesso; si valuta che questa proporzione scenda del 18% al giorno; la pubblicità viene ripetuta ogni 3 giorni; qual è la proporzione che ci si aspetta a regime?

8 Un lotto di 4000 lampadine ha un'emivita di 4 anni; quante lampadine si stima che saranno ancora funzionanti dopo 2 anni? E dopo 5?

Schede sui logaritmi

0 Definizione

Se abbiamo un'equazione $x = a^b$, la soluzione per x è già trovata.
Se abbiamo un'equazione $a = x^b$, la soluzione si trova subito con $x = a^{1/b}$.
Ma se abbiamo $b = a^x$ che si fa? Be', si può andare per tentativi: ad esempio, se l'equazione è $3 = 2^x$, facendo il grafico alla lavagna si capisce che x dev'essere maggiore di 1, perché è $3 > 2^1$; proviamo con $x = 1{,}2$ e otteniamo $3 > 2{,}29$; proviamo 1,5 e otteniamo $3 > 2{,}83$; proviamo con $x = 1{,}6$ e otteniamo $3 < 3{,}03$. Quindi il valore di x è qualcosa compreso fra 1,5 e 1,6. Si può andare avanti finché non si raggiunge un'approssimazione decente, ma non è un metodo comodo. Addirittura il modo di scrivere che stiamo adottando è un pasticcio.
Perciò, cominciamo a usare una notazione adeguata: nel caso che l'equazione sia del genere

$b = a^x$,

espliciteremo l'incognita scrivendo

$x = \log_a b$,

che si legge "logaritmo in base *a* di *b*". La '*a*' si chiama *base* e la '*b*' *argomento*. Mi raccomando, per evitare confusioni scrivete '*a*' più in basso di 'log' e di '*b*'.
Le due scritture $a^x = b$ e $x = \log_a b$ sono del tutto equivalenti e proprio questa equivalenza costituisce la definizione di logaritmo.
Nel nostro esempio, $3 = 2^x$ si scrive, in forma logaritmica, come $x = \log_2 3$. Per ricordare dove piazzare *a*, *b* e *x*, notate che ciò che si chiama base nella forma esponenziale si chiama base anche nella forma logaritmica e che *x* e *b* si cambiano di posto rispetto al segno di uguaglianza.
Ultimo commento: non pensate che $\log_a b$ sia come $\log_a \times b$! Il segno di logaritmo *non* si moltiplica! Semplicemente indica la trasformazione che va fatta sull'argomento, nel nostro caso *b*. Sono comunque del parere che sarebbe stato meglio adottare un segno apposta, come ad esempio $\#_a b$, ma ormai la frittata è fatta e ci dobbiamo tenere questa simbologia, anche perché è la stessa in tutto il mondo: se leggete un manuale scritto in *swahili* o in coreano, trovate le formule scritte come nei manuali italiani.

1 Calcolo

Bene, ora che abbiamo trovato almeno un modo di scrivere l'incognita isolata, pensiamo a come calcolare i logaritmi. Parliamoci chiaro: il modo generale non appartiene al programma di quest'anno. Se tutto va bene, appartiene al programma dell'anno prossimo (sviluppo di Mclaurin). Ci limiteremo a imparare a usare la calcolatrice. Cominciate a notare che avete due tasti, uno con la scritta 'Log' e uno con la scritta 'ln'; per la cronaca, non c'è scritto 'uno enne', ma 'elle enne'. Il primo tasto indica i logaritmi in base 10, mentre il secondo indica i logaritmi in base *e*; il segno *e* è universalmente adottato per indicare un certo numero, pari a circa 2,718, che è una costante importante quanto il più noto π. Come notate, sulla calcolatrice ci sono soltanto due basi; più avanti troveremo il modo di farcele bastare. Per ora, impariamo a usarle. Secondo i modelli, per calcolare ad esempio Log 3, cioè $\log_{10} 3$, bisogna prima scrivere 3 e poi schiacciare Log o prima schiacciare Log e poi scrivere 3; fate la prova sulla vostra calcolatrice, per capire come funziona.

2 Costruzione del grafico

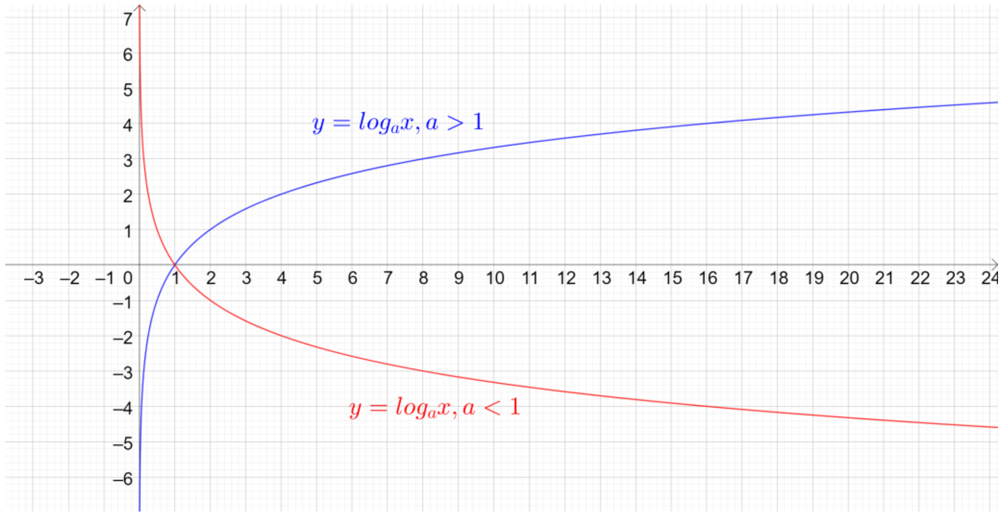
Applicando la definizione di logaritmo, posso scrivere la funzione esponenziale (1.1), cioè $y = a^x$, come

$$x = \log_a y.$$

Essendo questa funzione uguale a $y = a^x$, ha anche lo stesso grafico. Tuttavia, non è così che vengono scritte le funzioni: non dev'essere *x* che dipende da *y*, ma *y* che dipende da *x*, perciò la funzione logaritmica va scritta come

$$y = \log_a x.$$

Lo scambio di *x* e *y* deve capitare anche sul grafico: per passare da $x = \log_a y$ a $y = \log_a x$ devo scambiare il *nome* delle due variabili e quindi anche il nome dei due assi, ottenendo un piano cartesiano in cui le ascisse si chiamano *y* e le ordinate *x*. Per tornare ai nomi tipici degli assi, devo "ruotare" gli assi intorno alla bisettrice del primo e terzo quadrante (o anche: vedere la funzione attraverso uno specchio messo sulla bisettrice) e, guarda caso, in questo modo il grafico dell'esponenziale diventa quello del logaritmo.
Il grafico sotto riporta in blu il caso con $a = 2$ e in rosso il caso con $a = ½$.



3 Proprietà

Semplicemente usando la definizione di logaritmo e un po' di algebra, è possibile ottenere alcune interessanti proprietà. Chiariamo un punto: per avere la sufficienza sarà necessario sapere almeno gli enunciati. Chiunque voglia superare il 7 deve anche sapere le dimostrazioni.
Cominciamo con alcune *proprietà elementari*.
* Sappiamo che è $a^1 = a$; passando ai logaritmi, si ottiene

$\log_a a = 1$.

* Sappiamo anche che è $a^0 = 1$; con i logaritmi, ciò diventa

$\log_a 1 = 0$.

Quindi, proprio come la funzione esponenziale passa sempre per il punto (0; 1), così quella logaritmica passa sempre per (1; 0).
* È poi ovvio che sia $\log_a b = \log_a b$; se prendiamo il secondo membro come un tutto unico, diciamo c, otteniamo $\log_a b = c$, cioè $a^c = b$, cioè

$a^{\log_a b} = b$.

* Altra ovvietà: è $a^b = a^b$, da cui, ponendo il secondo membro uguale a c, si ottiene $a^b = c$, cioè $\log_a c = b$, cioè

$\log_a a^b = b$.

Le ultime due proprietà indicano che esponenziale e logaritmo annullano a vicenda i loro effetti.
Finite le proprietà elementari, passiamo alle *proprietà operative*.

* ***Proprietà del prodotto***: ecco l'enunciato:

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.

Insomma, i logaritmi fanno passare da prodotti a somme.
Nota bene: non si dà una proprietà per $\log_a(b+c)$! Non inventate possibilità che, purtroppo, non esistono.
Per la dimostrazione, è comodo porre

$\log_a b = x$, da cui $a^x = b$,

e

$\log_a c = y$, da cui $a^y = c$.

Il prodotto di queste potenze dà

$bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

Tornando ai logaritmi, si ottiene

$\log_a(bc) = x+y$;

basta sostituire a x e y le loro espressioni e si arriva all'enunciato.

* ***Proprietà della potenza***: l'enunciato è

$\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

Questa proprietà permette di spostare la potenza dell'argomento davanti al logaritmo, cioè di passare da potenze a prodotti.
Partiamo dalla proprietà elementare secondo cui è

$a^{\log_a b} = b$.

Ora su questa proprietà possiamo applicare due diversi elevamenti a potenza: il primo può essere applicato ai membri nella loro interezza e porta a

$(a^{\log_a b})^k = b^k$,

cioè, per le proprietà delle potenze, a

$a^{k \cdot \log_a b} = b^k$;

il secondo può limitarsi alla sola b e porta a

$a^{\log_a b^k} = b^k$.

Ma i membri destri delle due uguaglianze sono uguali, quindi lo sono anche i membri sinistri, perciò è

$a^{\log_a b^k} = a^{k \cdot \log_a b}$.

Ricordo ora che la funzione esponenziale è monotona, perciò se due potenze con la stessa base sono uguali, allora anche gli esponenti sono uguali. E questo è esattamente l'enunciato.
Dimostrazione alternativa: si parte da

$b = a^x$;

elevando ambo i membri alla k, è

$b^k = (a^x)^k = a^{xk}$.

Passando ai logaritmi è

$x = \log_a b$

e

$x^k = \log_a b^k$.

Sostituendo l'espressione di x nella seconda uguaglianza, è

$\log_a b^k = k \cdot \log_a b$.

* ***Proprietà della divisione***: è

$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$.

È comunque una proprietà intuitiva, se si pensa alla proprietà del prodotto.
La dimostrazione si ottiene applicando le due proprietà precedenti: da

$\log_a(bc^k)$

si ottiene

$\log_a b + k \cdot \log_a c$.

Sostituendo a k il valore di –1, si ottiene

$\log_a(bc^{-1}) = \log_a b - \log_a c$.

E, dato che è

$c^{-1} = 1/c$,

l'enunciato è raggiunto.
Come si nota, con i logaritmi i prodotti diventano somme, le divisioni differenze e le potenze prodotti. Questo garantisce una notevole semplificazione dei calcoli, quando questi sono fatti a mano, e in effetti questo è lo scopo essenziale per cui John Napier (avrete già pensato: ma chi è quel piantagrane che ha inventato 'sta roba? Eccolo!), nel XVII secolo (che è il 1600, non il 1700!), li ha introdotti nella pratica. In effetti, ai tempi suoi erano stati accolti come una benedizione, ma immagino che oggi il vostro atteggiamento sia diverso. Tuttavia, i logaritmi restano un argomento utile.
Primo: sono il vostro primo contatto con funzioni "a forma di funzione": anche le rette e gli esponenziali sono funzioni, ma possono essere trattate anche come serie di calcoli che si possono fare a mano; qui invece prevale l'aspetto di legame fra variabili.
Secondo: vi introducono ai metodi assiomatici: dalla sola definizione di logaritmo è possibile ottenere alcune proprietà non ovvie.
Terzo: senza i logaritmi non ci sarebbe un modo efficiente per esplicitare una variabile all'esponente e le variabili all'esponente svolgono un ruolo importante in matematica finanziaria, dato che possono essere interpretate come tempo; anzi, svolgono un ruolo essenziale in tutti i fenomeni che variano a un tasso costante.
Quarto: doveste continuare con gli studi, trovereste che i logaritmi sono strumenti utili per costruire dimostrazioni.
Quinto: nella realtà, ci sono fenomeni che possono essere descritti da logaritmi.

Sesto: i logaritmi ci servono per costruire esempi ed esercizi.

* ***Proprietà del cambiamento di base***: è

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Trucco mnemonico per ricordarla: a sinistra, la *b* è in alto (all'argomento) e pure a destra lo è (al numeratore); a sinistra, la *a* è in basso (alla base) e pure a destra lo è (al denominatore).
La dimostrazione parte dalla proprietà

$a^{\log_a b} = b$;

facendo il logaritmo in base *c* di entrambi i membri, si ottiene

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b;$$

applicando la proprietà della potenza (che è $\log_a b$), si ottiene

$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$;

dividendo per $\log_c a$, si arriva all'enunciato.
Questa proprietà è importante, perché con essa si può ridurre qualunque base ad una base comoda per noi; in particolare alle basi 10 ed *e*, le uniche disponibili sulle calcolatrici. Ad esempio, se dobbiamo calcolare $\log_3 5$, basta applicare la proprietà per ottenere ln5/ln3; ora i logaritmi sono due, ma entrambi sono espressi in una base comoda; da qui si trova 1,6094379/1,0986123 = 1,4649735 e quindi si riesce a calcolare il logaritmo.
In pratica: soluzione di un'equazione astratta
Le proprietà dei logaritmi si possono applicare in vari modi, come si è capito dagli esercizi; alcuni modi sono però più utili di altri. Ad esempio, se abbiamo l'equazione $2 = 3^x$, la soluzione si ottiene con due procedimenti alternativi.
Si applica la definizione di logaritmo, ottenendo $x = \log_3 2$; poi, per il calcolo effettivo, si cambia la base, ottenendo ad esempio $x = \ln 2/\ln 3$.
Si fa il logaritmo (ad esempio naturale) di entrambi i membri, ottenendo $\ln 2 = \ln 3^x$; poi si applica la proprietà della potenza, arrivando a $\ln 2 = x \cdot \ln 3$; quindi si divide per ln3, in modo da avere $x = \ln 2/\ln 3$.
A voi la scelta della procedura che più vi aggrada.

***Un modo alternativo di dimostrare le proprietà operative col metodo della* quest**
La *quest* è una struttura narrativa, secondo cui appare un problema, un eroe compie un viaggio, risolve il problema e torna; l'esempio più noto è *Il signore degli anelli*.
In una *quest* matematica, appare un dubbio, una formula compie un viaggio attraverso alcune sue variazioni, risolve il dubbio e ripercorre le variazioni a ritroso. Lo schema è

formula da dimostrare ↔ variazione ↔ variazione ↔ ... ↔ variazione ↔ formula certa,

dove il simbolo "↔" significa "passaggio lecito in entrambe le direzioni" o "variazione equivalente".

* *Cambiamento di base*: è $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Dimostrazione: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \leftrightarrow \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b \leftrightarrow c^{\log_c a \cdot \log_a b} = b \leftrightarrow \left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = b \leftrightarrow a^{\log_a b} = b$.

* *Logaritmo del prodotto*: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.
Dimostrazione: per la definizione di logaritmo, $\log_a bc$ = $\log_a b+\log_a c$ ↔ $a^{\log_a b+\log_a c}$ = bc ↔ $a^{\log_a b}\cdot a^{\log_a c}$ = bc ↔ bc = bc.

* Dimostrare che è $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ è una semplice variazione sul tema.

* *Logaritmo della potenza*: è $\log_a b^k = k \log_a b$.
Dimostrazione: per la definizione di logaritmo, $\log_a b^k$ = $k\cdot\log_a b$ ↔ $a^{k\cdot\log_a b}$ = b^k ↔ $(a^{\log_a b})^k$ = b^k ↔ b^k = b^k.

4 Disequazioni

Finora abbiamo considerato il caso in cui ci interessa trovare un risultato unico. Tuttavia, può capitare il caso in cui ci basta conoscere un intervallo di valori. Questo è il caso delle disequazioni. Ad esempio: Stiamo capitalizzando in modo composto un capitale iniziale di 1200, al tasso del 5% annuo; dopo quanti anni supero il montante di 1800? Tradotto in formule, ciò significa risolvere la disequazione $1200(1,05)^n > 1800$. Per affrontare questo punto, si può disegnare sul piano cartesiano *ny* la funzione esponenziale $y = 1200(1,05)^n$ e la retta $y = 1800$, ottenendo due curve che si intersecano nel punto A, le cui coordinate sono (8,31...; 1800). Per quali valori di n la funzione esponenziale assume valori maggiori della retta, cioè è “più alta”? Chiaramente, per i punti a destra di A, cioè maggiori di 8,31. Questo risultato vale in tutti i casi in cui l’esponenziale è crescente e può essere riassunto così: se la soluzione dell’equazione $a^x = k$ è x^*, quando è $a > 1$, allora la soluzione della disequazione $a^x > k$ è $x > x^*$. Invertendo il segno di disuguaglianza nella disequazione, si inverte anche quello nella soluzione. Per compito: trovare quello che succede quando è $a < 1$.
Passiamo ora ai logaritmi. Se ho la disequazione $4 < \log_3 x$, comincio a disegnare $y = \log_3 x$, che è crescente; poi traccio la retta $y = 4$; quindi noto che la retta sta sotto per valori di x a destra del punto di intersezione, cioè maggiori della sua ascissa. La regola, scritta in generale, è dunque: se la soluzione dell’equazione $\log_a x = k$ è x^* ed è $a > 1$, allora la soluzione della disequazione $\log_a x > k$ è $x > x^*$. Anche qui, invertendo il segno di disuguaglianza nella disequazione, si inverte anche quello nella soluzione. Per compito: di nuovo, trovare quello che succede quando è $a < 1$.
Sia chiarissimo: questi risultati a memoria non servono. *Guai* a chi li impara a memoria. Vanno ricavati ogni volta, tracciando un semplice disegno, sul genere: dunque, l’esponenziale è crescente, quindi si disegna così; sto cercando il caso in cui la retta, con cui si confronta l’esponenziale, è minore; quindi mi interessano i valori a destra del punto di intersezione.

Esercizi sui logaritmi

1 Calcola
$\log_2 8$
$\log_3 81$
$\log_4 \sqrt{32}$
$\log_3 9\%$

2 Risolvi
$\log_2 x = 16$
$\log_5 x = 125$
$\log_4 x = 2\%$
$\log_7 x = 2$

3 Riduci a un unico logaritmo
$3\log 4+\log 3-\log 6$
$\frac{1}{2}\log 5-\frac{1}{4}\log 16+\log 2$

$7\log 9 - 2\log 3 + 5\log 11$

4 Metti in base 10 i seguenti logaritmi
$\log_3 7$
$\log_{11} 2$
$\log_3 92$
$\log_4 12$
$\log_{89} 5$

5 Trova un controesempio per mostrare che l'uguaglianza $\log_a x \log_a y = \log_a(x+y)$ non vale.

6 Risolvi le equazioni
$\log x + \log(x+1) = \log 3$
$2\log_2 x - \log_2 3 = 0$
$\log_7 5 + \log_7(x-1) = \log_7 x$

7 Risolvi le disequazioni
$\log_8 x > 3$
$\log_9(x-3) < 1$
$\log_{½}(6-3x) < 2$